LOGICA PER I TOLC

PROBABILITÀ

Se definiamo un evento , la probabilità che si verifichi l'evento è data da: $P(E) = \frac{\text{numero casi favorevoli}}{\text{numero casi possibili}}$

$P(E) = 1$ evento certo ; $P(E) = 0$ evento impossibile ; $P(\overline{E}) = 1 - P(E)$ evento complementare

si ha che: $0 \leq P(E) \leq 1$

Eventi incompatibili: quando il verificarsi di uno esclude gli altri;

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n) = P(E_1) + P(E_2) + \ldots + P(E_n)$$

Esempio: consideriamo il lancio di un dado. Si vuole calcolare la probabilità
che si verifichi uno dei seguenti eventi incompatibili.
E_1 = esce il numero 2;
E_2 = esce un numero dispari

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) = \frac{1}{6} + \frac{3}{6} = \frac{2}{3}$$

Eventi compatibili: quando il verificarsi di uno non esclude il verificarsi degli altri;

per due eventi: $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$

per tre eventi:

$$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) - P(E_1 \cap E_2) - P(E_1 \cap E_3) - P(E_2 \cap E_3) + P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)$$

Esempio: consideriamo il lancio di un dado. Si vuole calcolare la probabilità che si verifichi uno dei seguenti eventi compatibili.
E_1= esce il numero 2;
E_2= esce un numero pari

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{6} + \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

Eventi indipendenti: quando il verificarsi di uno non modifica la probabilità di verificarsi degli altri;

$$P(E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_n) = P(E_1) \cdot P(E_2) \cdot \ldots \cdot P(E_n)$$

Esempio: consideriamo l'estrazione successiva di due carte da un mazzo di 52. Si estrae la prima carta e la si rimette nel mazzo, quindi si estrae la seconda carta. Calcoliamo la probabilità che si verifichino contemporaneamente i seguenti eventi indipendenti: E_1 esce una carta di cuori; E_2 esce una figura.

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2) = \frac{13}{52} \cdot \frac{12}{52} = \frac{3}{52}$$

Eventi dipendenti: quando il verificarsi di uno modifica la probabilità di verificarsi degli altri.

per due eventi: $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2 | E_1)$

per tre eventi: $P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = P(E_1) \cdot P(E_2 | E_1) \cdot P(E_3 | E_1 \cap E_2)$

Esempio: consideriamo l'estrazione successiva di due carte da un mazzo di 52. Si estrae la prima carta e non la si rimette nel mazzo, quindi si estrae la seconda carta. Calcoliamo la probabilità che si verifichino contemporaneamente i seguenti eventi indipendenti: E_1 esce una carta di cuori; E_2 esce ancora una carta di cuori.

FORMULA → $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2 | E_1) = \frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51} = \frac{1}{17}$

STATISTICA

Moda: è la modalità che presenta la massima frequenza;

Mediana: è l'osservazione che occupa la posizione centrale della successione: se N pari, la mediana è la semi-somma dei due elementi centrali;

Media: è la somma degli ***n*** numeri divisi per ***n***.

$$M(x_1; x_2; \ldots x_n) = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots x_n)$$

Facciamo un ***esempio:***
Martino, negli ultimi 5 scritti di matematica ha preso i seguenti voti: **5; 7; 4; 6; 5.**

La moda è 5 perché il voto **5** è quello che compare con maggior frequenza tra i voti di Martino.

La mediana è 5,5 perché, mettendo in ordine crescente i voti, i due voti che risultano centrali nella loro distribuzione sono **5 e 6** e quindi ne calcolo la loro semi-somma.

La media aritmetica è 5,4 perché se svolgo il calcolo ottengo: $M(4{,}5{,}5{,}6{,}7) = \frac{1}{5}(4 + 5 + 5 + 6 + 7) = 5{,}4$

CALCOLO COMBINATORIO

L'ordine ha importanza?

- **SI** → Disposizioni / permutazioni → k = n ?
  - **SI** → Permutazioni → i k = n elementi sono tutti distinti?
    - **SI** → **Permutazioni semplici**
    - **NO** → **Permutazioni con ripetizione**
  - **NO** → Disposizioni → Uno stesso elemento può essere ripetuto?
    - **SI** → **Disposizioni con ripetizione**
    - **NO** → **Disposizioni semplici**
- **NO** → Combinazioni → Uno stesso elemento può essere ripetuto?
  - **SI** → **Combinazioni con ripetizione**
  - **NO** → **Combinazioni semplici**

FORMULE

Permutazioni semplici $P_n = n!$

Perm. con ripetizione $P_n^{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \ldots n_k!}$

Disposizioni semplici $D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$

Disp. con ripetizione $D'_{n,k} = n^k$

Combinazioni semplici $C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$

Comb. con ripetizione $C'_{n,k} = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k! \cdot (n-1)!}$

TAVOLE DI VERITÀ

p	q	$p \vee q$	$p \dot{\vee} q$	$p \wedge q$	$\neg p$	$p \Rightarrow q$	$p \Longleftrightarrow q$
V	V	V	F	V	F	V	V
V	F	V	V	F	F	F	F
F	V	V	V	F	V	V	F
F	F	F	F	F	V	V	V

Modus Ponens

$$[[p \Rightarrow q] \wedge p] \Rightarrow q$$

Modus Tollens

$$[[p \Rightarrow q] \wedge \overline{q}] \Rightarrow \overline{p}$$

Quantificatori

Quantificatore universale (per ogni, tutti): ∀
Quantificatore esistenziale (esiste almeno uno): ∃

ALTRE FORMULE

Prima Legge di Morgan
La negazione di una congiunzione è equivalente alla disgiunzione delle negazioni delle singole.

$$\overline{[p \wedge q]} = [\overline{p} \vee \overline{q}]$$

Seconda Legge di Morgan
La negazione di una disgiunzione è equivalente alla congiunzione delle negazioni.

$$\overline{[p \vee q]} = [\overline{p} \wedge \overline{q}]$$